

粒子法の現在と未来

九州大学大学院工学研究科・社会基盤部門
浅井光輝

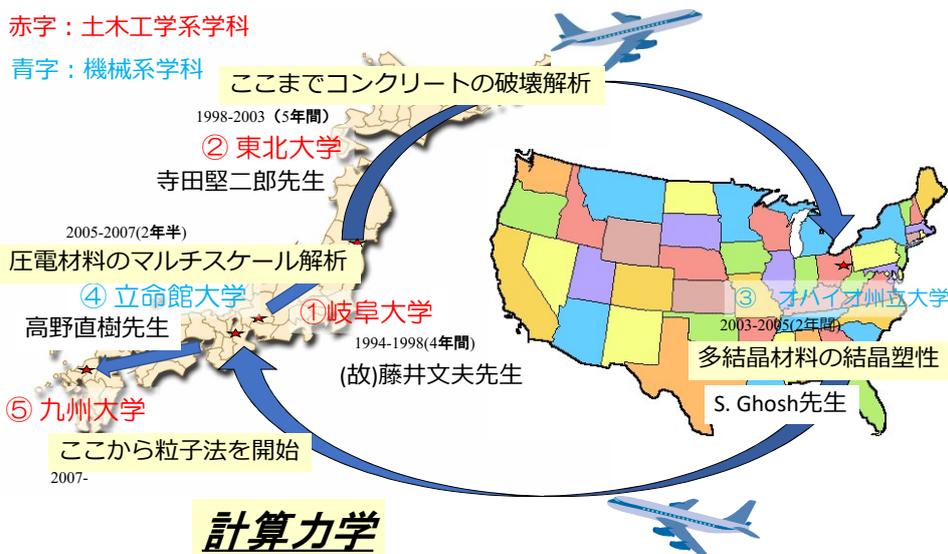


自己紹介

所属学会：土木学会、日本計算工学会、日本材料学会、日本機械学会

赤字：土木工学系学科

青字：機械系学科

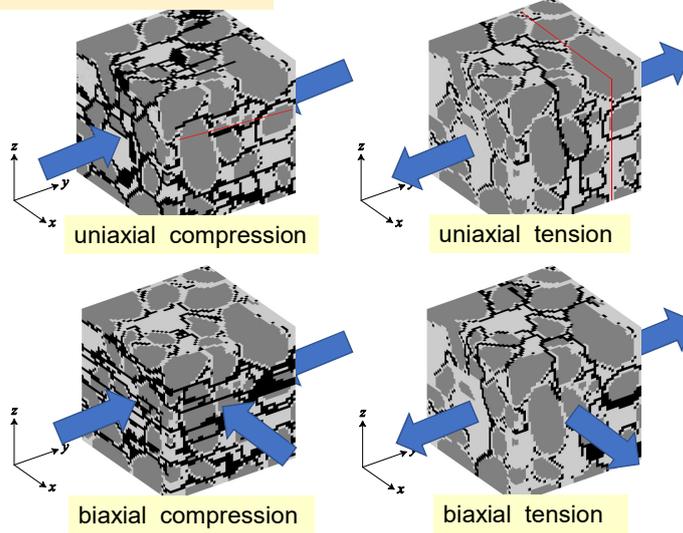


2007年から14年の成果



なぜ、粒子法をやりたくなった？

メッシュがあるから、き裂の表現が困難？
メッシュがあるから、大変形で要素がつぶれる？



災害に対して、数値計算は果たして役に立ったのか!?



2011 東日本大震災



2017 九州北部豪雨



2018 西日本豪雨

実在都市データを使った津波浸水解析事例



街区への津波浸水の動画



仮想津波避難体験システム

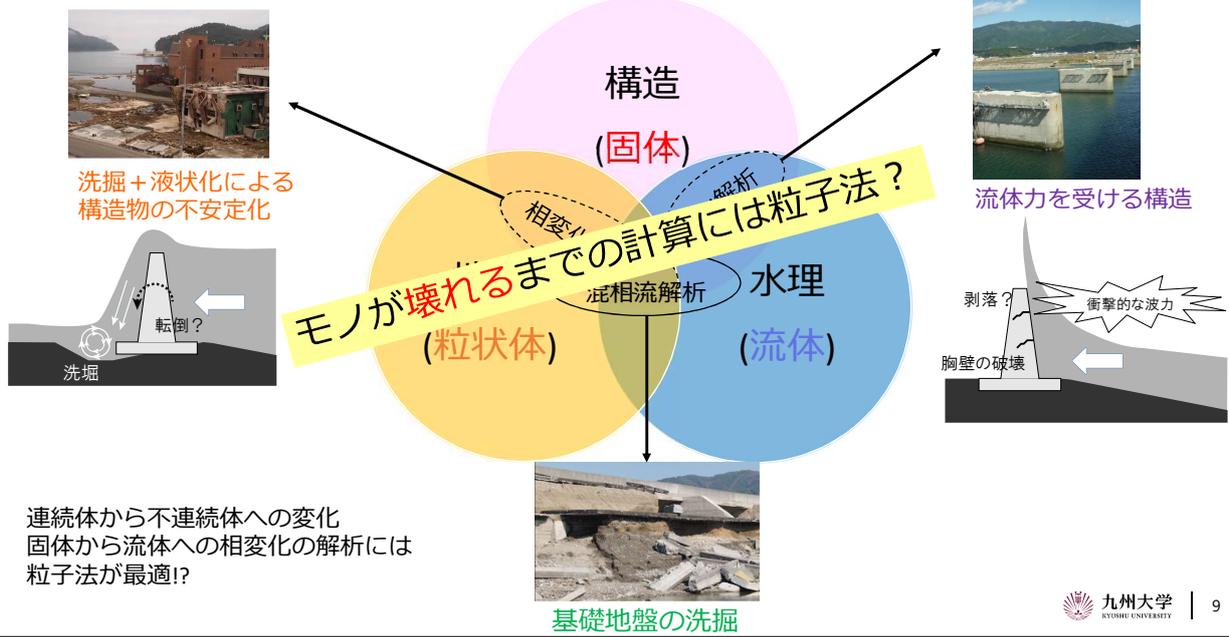


高粘性流体によるハチミツのコイリング現象

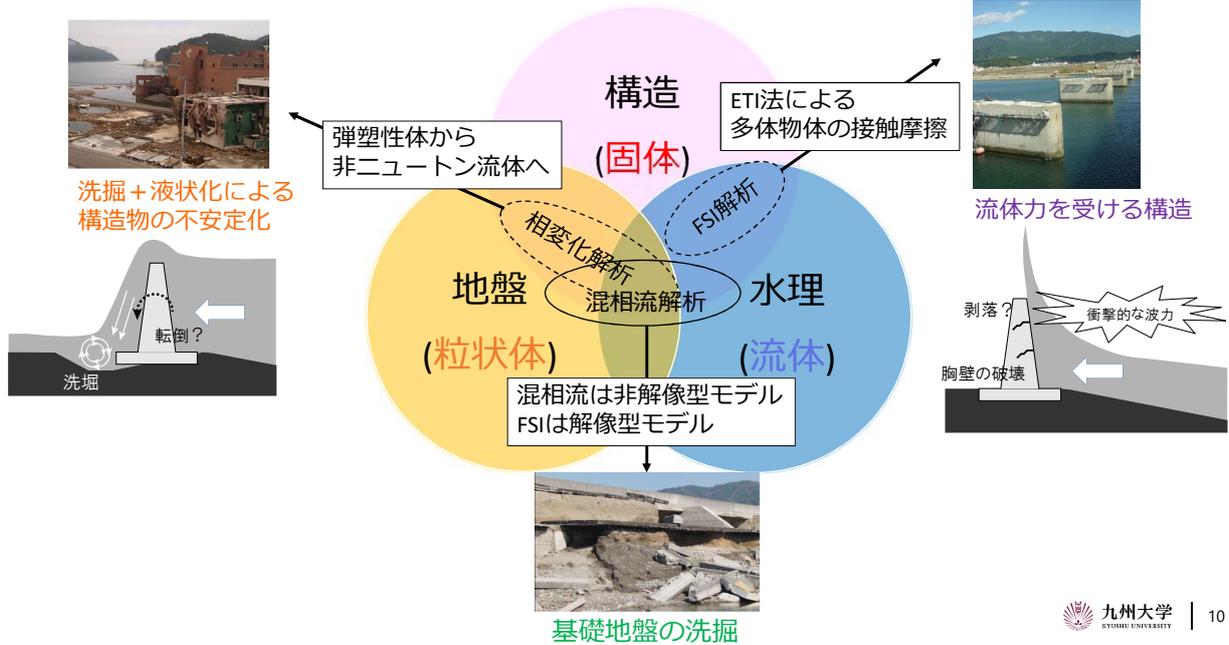
→ 今後、土石流・火砕流への応用を



自然災害におけるマルチフィジックス現象

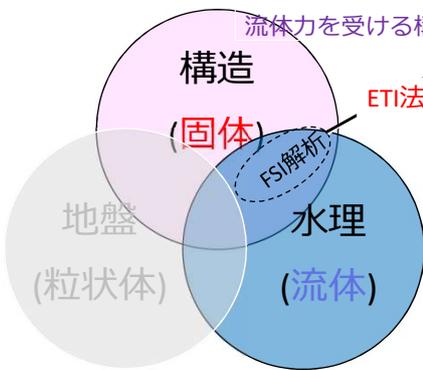


自然災害におけるマルチフィジックス現象

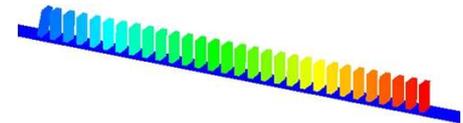


自然災害におけるマルチフィジックス現象(解像型モデル)

Fluid-rigid-body interaction simulations and validations using a coupled stabilized ISPH-DEM incorporated with the ETI
 Asai, M., Li, Y., Chandra, B. & Takase, S
 Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 377, 113681., 2021



ETIのポイント②
 (多数同時接触を考える)



ニュートンの反発係数 \rightarrow Storageの反発係数

$$\mathbf{v}^{n+1} = -e \mathbf{v}^n \quad W_{restituti} = e^2 W_{compression}$$

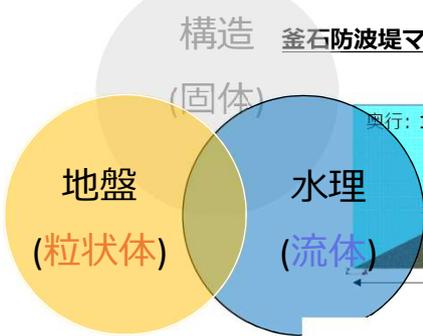
適切な反発を与える力積を与える

$$\lambda = \frac{-(1+e) \mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}}{\sum_{i=\{A,B\}} (M_i^{-1} + (\mathbf{I}_i^{-1} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}) \times \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n})}$$

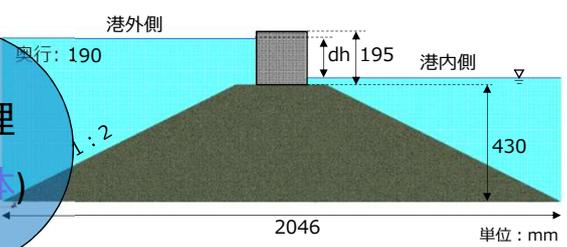
ETIのポイント①

$\Delta t(\text{流体}) \approx \Delta t(\text{剛体接触})$

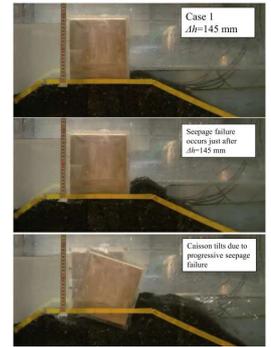
防波堤マウンドの浸透崩壊解析(土は非解像, ブロックは解像)



釜石防波堤マウンドの浸透崩壊再現実験 (K. Kasama, 2021*)



By Kumpei Tsuji(D3)

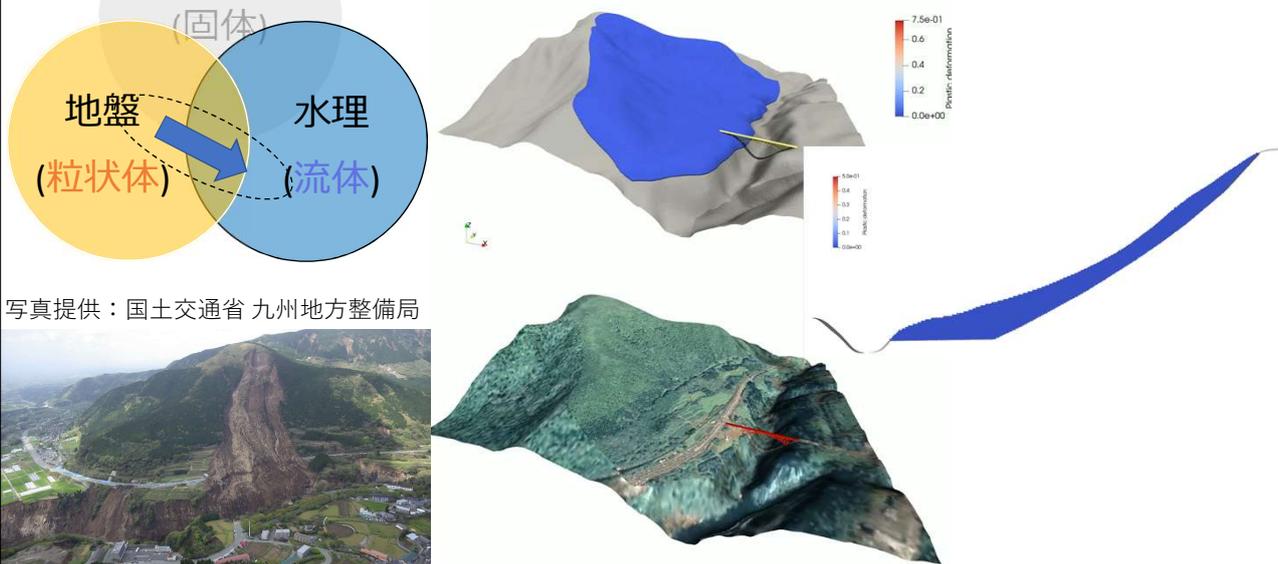


浸透崩壊 (dh=14.5cm)

解析条件	時間増分	10 ⁻⁶ sec
ISPH	初期粒子間隔	5 mm
	安定化パラメータ	0.01
	直径	5 mm
DEM	密度	2.7 g/cm ³
	バネ定数	100000 N/m

自然災害におけるマルチフィジックス現象

A phase-change approach to landslide simulations: Coupling finite strain elastoplastic TLSPH with non-Newtonian IISPH」, *Computers and Geotechnics*, Vol. 148, 104815, 2022. *Computers and Geotechnics*. 146, 113681., 2022



粒子型解法の代表格

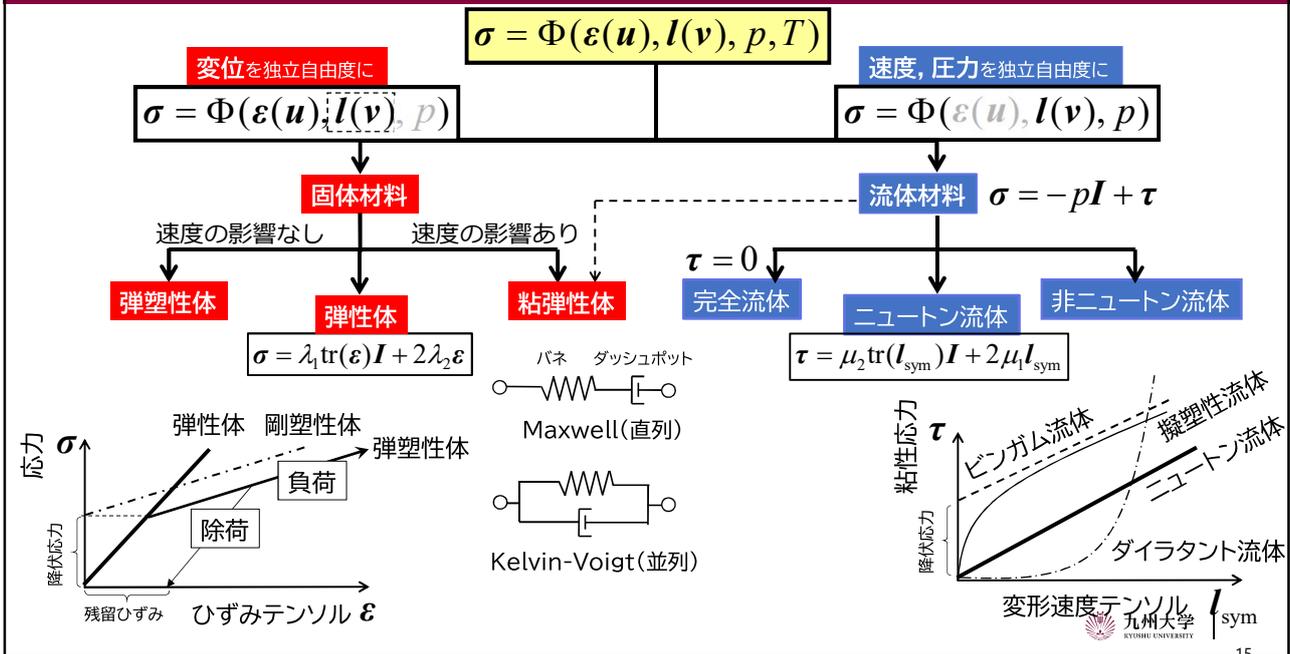
Smoothed **P**article **H**ydrodynamics

has been proposed by Lucy, Monaghan and in 1977

Moving **P**article **S**emi-implicit method

➡ ダイナミックな動画を見せてくれるけど、正しく解いているの？

連続体としての固体と流体の材料モデリング



SPH法の基礎概念 (粒子離散化)

Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)

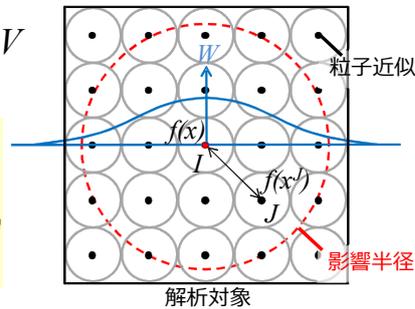
物体を有限個の粒子に離散化し、その任意の点の物理量を近傍粒子の物理量の重みつき平均として近似

$$f(x) = \int f(x^j) W(x - x^j, h) dV$$

$$f(x) \approx \sum_{j=1}^N \frac{m^j}{\rho^j} f(x^j) W(x - x^j, h)$$

粒子間距離

重み関数



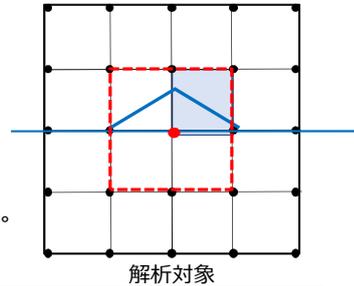
<主な計算手順>

- ① 近傍粒子検索 (各粒子Iに対するI-Jのペアとその総数N)
- ② 重み関数の形状
- ③ 独立変数の更新方法

FEMとSPH（内挿関数の視点から）

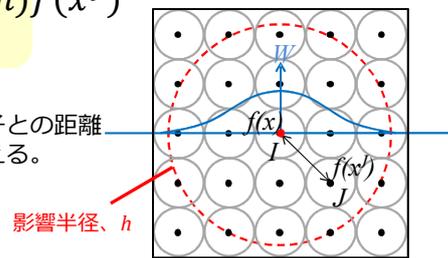
$$f^{\text{FEM}}(x) \approx \sum_{J=1}^4 N(x^J) f(x^J)$$

- 自然座標系では**固定** 一般座標系では要素形状に依存
- 節点では、節点に関する重み関数は1、その他の節点ではゼロ
- 関連するのは要素を介して、ひとつ飛ばした節点の値は関係ない。
- **弱形式**化した積分型の支配方程式(1階微分までで十分)



$$f^{\text{SPH}}(x) \approx \sum_{J=1}^N \frac{m^J}{\rho^J} W(x - x^J, h) f(x^J)$$

- 一般座標系において、**固定**した関数。変数は近傍粒子との距離
- 隣接粒子だけではなく、周辺の粒子の相互作用を考える。
- **強形式**の支配方程式(2階微分まで必要)



ナビエーストックス方程式の粒子離散化

SPH

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot \left(\frac{\mu}{\rho} \nabla \mathbf{v} \right) + \frac{1}{\rho} \mathbf{b}$$

前進差分

圧力勾配

速度のラプラシアン

$$\frac{\mathbf{v}_i^{n+1} - \mathbf{v}_i^n}{\Delta t} = -\sum_j m_j \left(\frac{p_j}{\rho_j^2} + \frac{p_i}{\rho_i^2} \right) \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) + \sum_j m_j \left(8 \frac{v_i + v_j}{\rho_i + \rho_j} \frac{(\mathbf{v}_i^n - \mathbf{v}_j^n) \cdot (\mathbf{x}_i^n - \mathbf{x}_j^n)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2} \right) \nabla W + \frac{1}{\rho} \mathbf{b}_i$$

その他の微分モデルもある

$$\nabla p(\mathbf{x}) \approx -\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} p_j \nabla W = \frac{1}{\rho} \sum_j \frac{m_j}{\rho} (p_j - p_i) \nabla W$$

流体力学

■ 粒子法特有の安定化法 = 粒子の均等配置の実現

人工粘性 (乱れた流れを落ち着かせたい)

- ① 仮想応力テンソルの導入
- ② 人工粘性 (渦粘性) の導入

XSPH (粒子配置の乱れを起こさないように) または **シフティング**

$$\langle v^i \rangle = v^i + \epsilon \sum_j \frac{m^j}{\rho^j} (v^j - v^i) W^{ij} \quad \leftarrow \quad \langle v^i \rangle = \sum_j \frac{m^j}{\rho^j} v^j W^{ij}$$

自身の値を尊重したスムージング SPHオリジナルのスムージング ($\epsilon=1$ と等価)

CSPH (粒子配置の乱れがあっても高精度に)

$$\begin{aligned} \langle f(x^i) \rangle &= \sum_j \frac{m^j}{\rho^j} f(x^j) W^{ij} & \langle \nabla f(x^i) \rangle &= -\sum_j \frac{m^j}{\rho^j} f(x^j) \nabla W^{ij} \\ &= \sum_j \frac{m^j}{\rho^j} f(x^j) \tilde{W}^{ij} \text{ Kernel correction} & &= -\sum_j \frac{m^j}{\rho^j} f(x^j) \tilde{\nabla} W^{ij} \text{ Kernel gradient correct.} \\ & \quad \sum_j \tilde{W}^{ij} = 1 \rightarrow \tilde{W}^{ij} = \frac{W^{ij}}{\sum_k \frac{m^k}{\rho^k} W^{ik}} & & \text{角運動量を保存するように補正} \end{aligned}$$

J. Bonet and S. Kulasegaram
Int.J. Numer. Meth. Engng, 2000 Vol. 47, pp1189-1214

修正微分モデルの導出 ~修正勾配モデル~

Taylor 展開 :

$$\phi_{ij} = x_{ij} \cdot \nabla \phi_i + R_1 \quad R_1 : \text{剰余項}$$

両辺に積分補間子 ∇w_{ij} を乗じて積分

$$\int_{\Omega_h} \phi_{ij} \nabla w_{ij} dx_i = \int_{\Omega_h} (x_{ij} \cdot \nabla \phi_i + R_1) \nabla w_{ij} dx_i$$

$$\int_{\Omega_h} \phi_{ij} \nabla w_{ij} dx_i = \left[\int_{\Omega_h} (\nabla w_{ij} \otimes r_{ij}) dx_i \right] \nabla \phi_i + \int_{\Omega_h} R_1 \nabla w_{ij} dx_i$$

積分を“粒子の和”で近似して整理

$$\sum_j V_j \phi_{ij} \nabla w_{ij} = \left[\sum_j V_j (\nabla w_{ij} \otimes r_{ij}) \right] \langle \nabla \phi \rangle_i + \sum_j V_j R_1 \nabla w_{ij}$$

$$\langle \nabla \phi \rangle_i = L_i \sum_j V_j (\phi_{ij} - R_1) \nabla w_{ij} \quad (0)$$

$$\text{修正行列} : L_i = \left[\sum_j V_j (\nabla w_{ij} \otimes x_{ij}) \right]^{-1}$$

ポイント① L_i を考慮

1次精度の勾配モデル :

$$\langle \nabla \phi \rangle_i = L_i \sum_j V_j \phi_{ij} \nabla w_{ij} =: \sum_j V_j \phi_{ij} \tilde{\nabla} w_{ij} \quad (1)$$

$$\tilde{\nabla} w_{ij} =: L_i \nabla w_{ij}$$

ポイント② L_i と2次までの R_1 を考慮

new

2次精度の勾配モデル :

$$\langle \nabla \phi \rangle_i = \sum_j V_j \left(\phi_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{ndim} \sum_{j=1}^{ndim} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^l \partial x^j} x_{ij}^l x_{ij}^j \right) \tilde{\nabla} w_{ij} \quad (2)$$

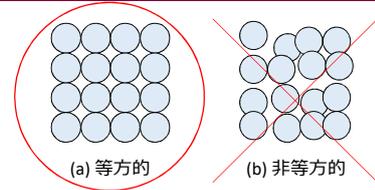
ndim : 次元数 $x^i = x$
 $x^{ii} = y$
 $x^{iii} = z$

ポイント③ 古典モデルで単位行列

標準!?なラプラシアンモデルの導出 (勾配モデルも同様)

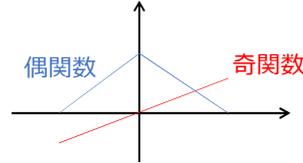
一般的なラプラシアンモデルの離散微分モデル (Taylor展開より導出)

$$\langle \nabla^2 \phi \rangle_i = 2 \sum_j V_j \phi_{ij} \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla w_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|^2} \quad (\phi_{ij} = \phi_j - \phi_i, \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$$



- 問題点**
- ・ 基本は、積分の形でのみ成立
 - ・ 等方的な粒子配置でのみ成立

導出過程において、体積積分で近似をしている。



$$\int_{\Omega_h} \overbrace{\mathbf{x}_{ij}^i \mathbf{x}_{ij}^i \mathbf{x}_{ij}^i}^{\text{奇}} \frac{\mathbf{x}_{ij} \cdot \nabla w_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|^2} d\mathbf{x}_i = \mathbf{0}, \quad \int_{\Omega_h} \overbrace{\mathbf{x}_{ij}^i \mathbf{x}_{ij}^{\text{ii}} \mathbf{x}_{ij}^{\text{ii}} \mathbf{x}_{ij}^{\text{ii}}}_{\text{奇}} \frac{\mathbf{x}_{ij} \cdot \nabla w_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|^2} d\mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad \begin{matrix} \mathbf{x}^i = x \\ \mathbf{x}^{\text{ii}} = y \end{matrix} \quad i, \text{ii} : \text{座標軸の方向}$$

$$\int_{\Omega_h} \overbrace{(\mathbf{x}_{ij}^i)^2 \mathbf{x}_{ij}^i \mathbf{x}_{ij}^i}_{\text{偶}} \frac{\mathbf{x}_{ij} \cdot \nabla w_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|^2} d\mathbf{x}_j + \int_{\Omega_h} \overbrace{(\mathbf{x}_{ij}^{\text{ii}})^2 \mathbf{x}_{ij}^{\text{ii}} \mathbf{x}_{ij}^{\text{ii}}}_{\text{偶}} \frac{\mathbf{x}_{ij} \cdot \nabla w_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|^2} d\mathbf{x}_j = \int_{\Omega_h} (\mathbf{x}_{ij} \cdot \nabla w_{ij}) d\mathbf{x}_j = 1$$

重み関数のユニティ条件から導出可 (重み関数の勾配のユニティ条件)

修正微分モデルの導出 ~2階微分モデル (ラプラシアン, 混合微分)~

2次までのTaylor展開 (2次元) :

$$\phi_{ij} = \sum_{l=1}^{\text{ii}} \frac{\partial \phi_i}{\partial x^l} x_{ij}^l + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\text{ii}} \sum_{j=1}^{\text{ii}} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^l \partial x^j} x_{ij}^l x_{ij}^j \approx \mathbf{x}_{ij} \cdot \langle \nabla \phi \rangle_i + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\text{ii}} \sum_{j=1}^{\text{ii}} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^l \partial x^j} x_{ij}^l x_{ij}^j \quad (3)$$

↓ 1階微分の項に**2次精度の勾配(粒子離散)モデル**を代入

$$\phi_{ij} = \mathbf{x}_{ij} \cdot \sum_j V_j \left(\phi_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\text{ii}} \sum_{j=1}^{\text{ii}} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^l \partial x^j} x_{ij}^l x_{ij}^j \right) \tilde{\nabla} w_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\text{ii}} \sum_{j=1}^{\text{ii}} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^l \partial x^j} x_{ij}^l x_{ij}^j \quad (4)$$

↓ 両辺に積分補間子 $\overbrace{(\mathbf{x}_{ij}^i \mathbf{x}_{ij}^{\text{ii}} \mathbf{x}_{ij}^{\text{ii}})}^{\text{偶 奇 奇}} / |\mathbf{x}_{ij}|^4$ を乗じて積分し、**"粒子の和"**で近似

$$\sum_j V_j \frac{\mathbf{x}_{ij} \cdot \tilde{\nabla} w_{ij}}{|\mathbf{x}_{ij}|^4} [\mathbf{q}_{ij}] [\mathbf{p}_{ij}]^T \left[\frac{\partial^2 \phi_i}{(\partial x^i)^2} \quad \frac{\partial^2 \phi_i}{(\partial x^{\text{ii}})^2} \quad 2 \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^i \partial x^{\text{ii}}} \right]^T = 2 \sum_j V_j \frac{\mathbf{x}_{ij} \cdot \tilde{\nabla} w_{ij}}{|\mathbf{x}_{ij}|^4} [\mathbf{q}_{ij}] \left\{ \phi_{ij} - \mathbf{x}_{ij} \cdot \left(\sum_k V_k \phi_{ik} \tilde{\nabla} w_{ik} \right) \right\} \quad (5)$$

係数行列 $[\mathbf{M}_i]$

$$[\mathbf{p}_{ij}] = \left[(\mathbf{x}_{ij}^i)^2 - \mathbf{x}_{ij} \cdot \sum_k V_k (\mathbf{x}_{ik}^i)^2 \tilde{\nabla} w_{ik} \quad (\mathbf{x}_{ij}^{\text{ii}})^2 - \mathbf{x}_{ij} \cdot \sum_k V_k (\mathbf{x}_{ik}^{\text{ii}})^2 \tilde{\nabla} w_{ik} \quad \mathbf{x}_{ij}^i \mathbf{x}_{ij}^{\text{ii}} - \mathbf{x}_{ij} \cdot \sum_k V_k \mathbf{x}_{ik}^i \mathbf{x}_{ik}^{\text{ii}} \tilde{\nabla} w_{ik} \right]^T$$

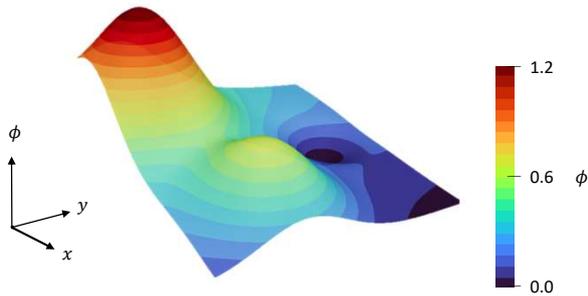
$$[\mathbf{q}_{ij}] = \left[(\mathbf{x}_{ij}^i)^2 \quad (\mathbf{x}_{ij}^{\text{ii}})^2 \quad \mathbf{x}_{ij}^i \mathbf{x}_{ij}^{\text{ii}} \right]^T$$

理論解と数値微分の比較検証

関数②

$$\begin{aligned} \phi(x,y) = & 0.75 \exp[-(9x-2)^2/4 - (9y-2)^2/4] \\ & + 0.75 \exp[-(9x+1)^2/49 - (9y+1)/10] \\ & + 0.5 \exp[-(9x-7)^2/4 - (9y-3)^2/10] \\ & - 0.2 \exp[-(9x-4)^2 - (9y-7)^2] \end{aligned}$$

(0 ≤ x, y ≤ 1)



誤差評価指標

絶対誤差 :

$$Err = |(\nabla^2 \phi)_i - \nabla^2 \phi_i|$$

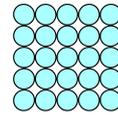
二乗平均平方根誤差 (RMSE) :

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_i ((\nabla^2 \phi)_i - \nabla^2 \phi_i)^2}{\sum_i (\nabla^2 \phi_i)^2}}$$

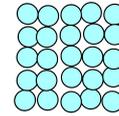
$\nabla^2 \phi$: 理論解 $(\nabla^2 \phi)_i$: 数値微分

検証

- 粒子配置の乱れなし : 格子状位置
- 粒子配置の乱れあり : 粒子直径の20%まで



乱れなし

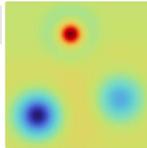


乱れあり

理論解と数値微分の比較検証

絶対誤差

乱れなし



乱れあり

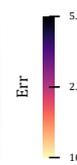
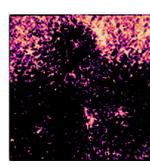
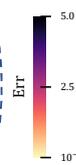
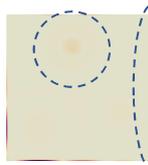
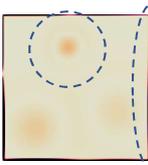
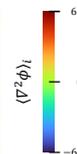
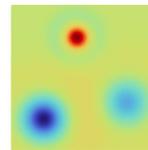
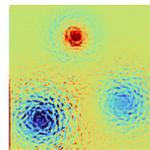
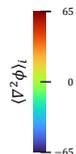
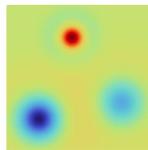
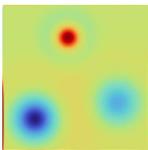


標準モデル

提案モデル

標準モデル

提案モデル



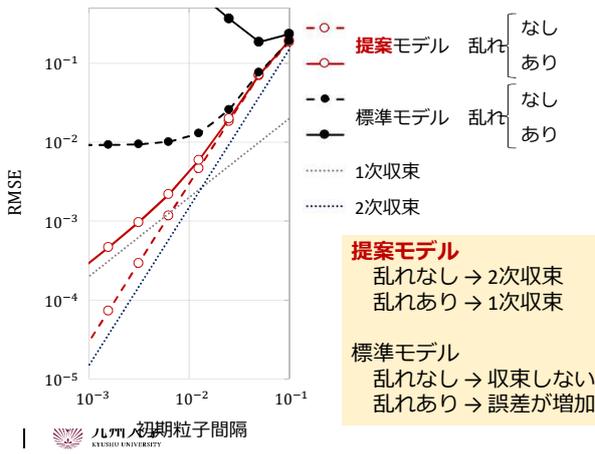
- 全体的に誤差 **小**
- 影響域の粒子欠損による精度低下が改善

- 粒子配置の乱れによる精度低下が改善

理論解と数値微分の比較検証

二乗平均平方根誤差 (RMSE)

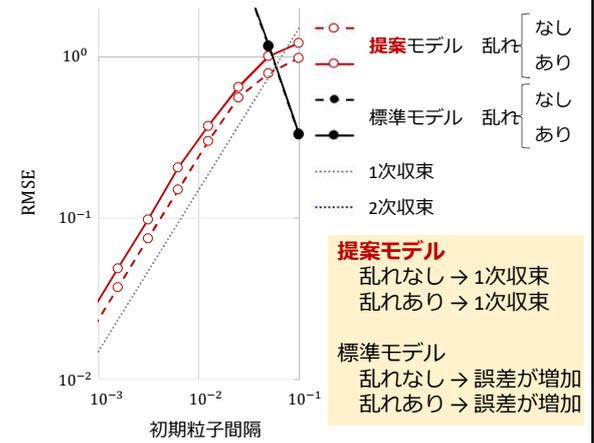
内部粒子



外部粒子

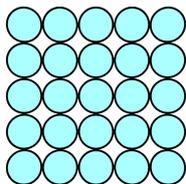


影響域の粒子欠損あり

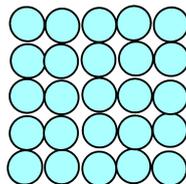


既定関数における理論解と数値微分の比較検証 ~まとめ~

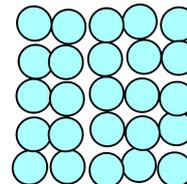
- 混合微分項が乱れに有効である
- 関数によらずSPH(2)の精度が非常に高い
 - 混合微分での検証でも高い精度が得られた
- わずかな粒子配置の乱れでも離散微分の精度が低下



乱れなし



乱れ10%



乱れ20%

流体解析による精度検証 ～二次元正方キャビティ流れ～

ISPH : Incompressible Smoothed Particle

Shao and Lo, 2003

Hydrodynamics

- 非圧縮性流体を対象とした半陰解法型のSPH法

PS : Particle Shifting

Xu et al., 2009

- 粒子配置の粗密を防ぐ工夫の一つ
- 粗密を判定し、改善する方向へ粒子をシフトさせる

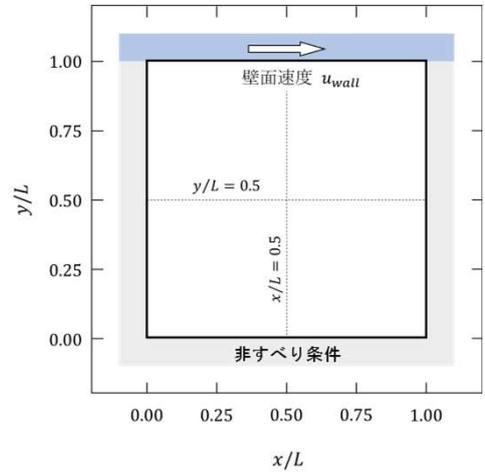
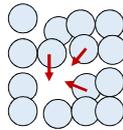
界面近傍粒子以外

$$\delta r_s = -C_{shift} h^2 \nabla C$$

$$\ast \delta r_s \leq 0.2h$$

$$C_{shift} = 0.20$$

C_{shift} : シフト係数
 h : 1/2影響半径
 ∇C : 粒子濃度勾配



解析条件

$$u_{wall} = 100 \text{ (cm/sec)}$$

$$L = 100 \text{ (cm)}$$

$$dx = 1.0 \text{ (cm)}$$

u_{wall} : 壁面流速
 L : 一辺の長さ
 dx : 粒子直径

レイノルズ数

$$Re = \frac{u_{wall} L}{\nu}$$

$$\nu = 100 \text{ (cm}^2\text{/sec)} \rightarrow Re = 100$$

$$\nu = 10 \text{ (cm}^2\text{/sec)} \rightarrow Re = 1000$$

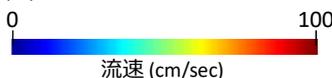
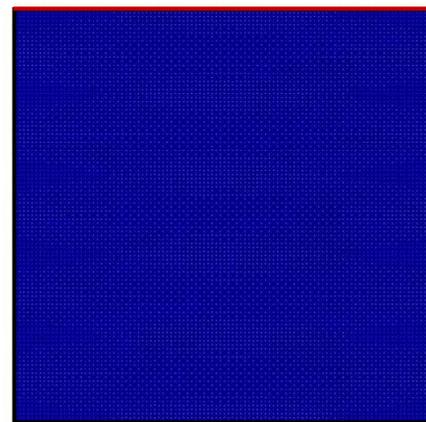
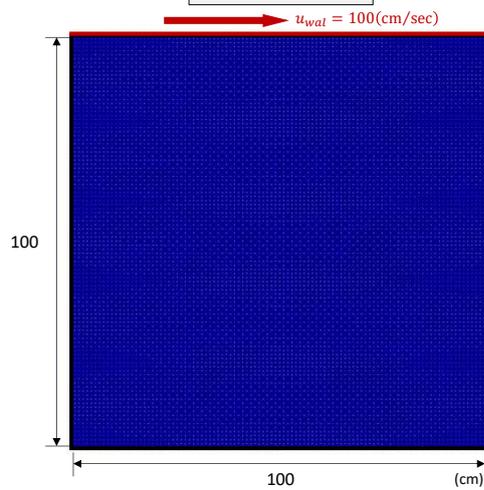
ν : 動粘性係数

流体解析による精度検証 ～二次元正方キャビティ流れ～

Re = 1000

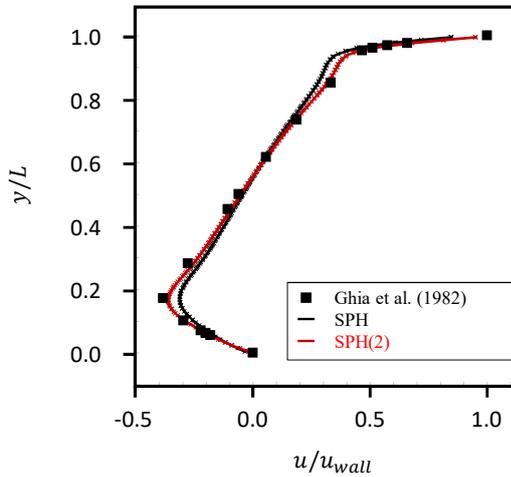
一般的なモデル (NORMAL)

提案モデル (FULL_INVERSE(2))

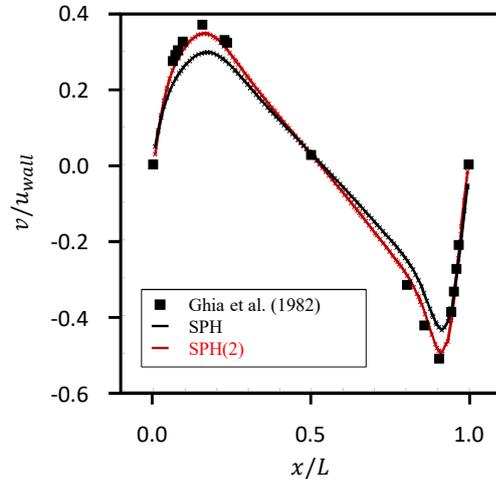


流体解析による精度検証～二次元正方キャビティ流れ～

Re = 1000



(1) $x/L = 0.5$ における x 方向の流速

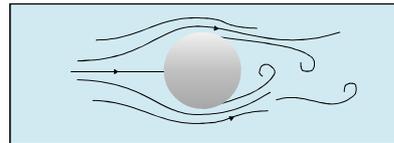


(2) $y/L = 0.5$ における y 方向の流速

カルマン渦での妥当性確認

SPH法の課題

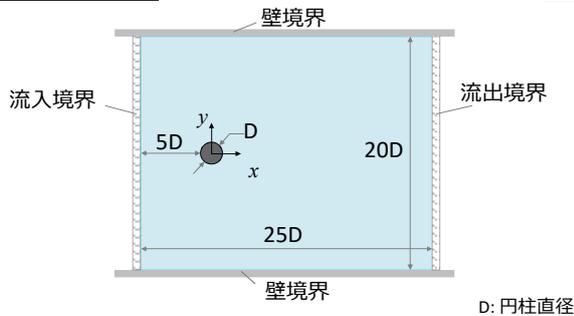
引っ張り不安定性を有するため
負圧下の計算ができない



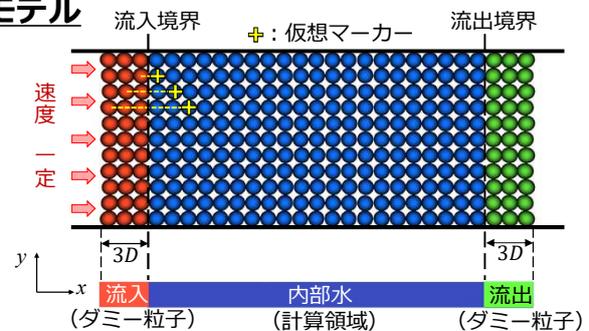
カルマン渦

負圧領域を含むカルマン渦の再現を行う

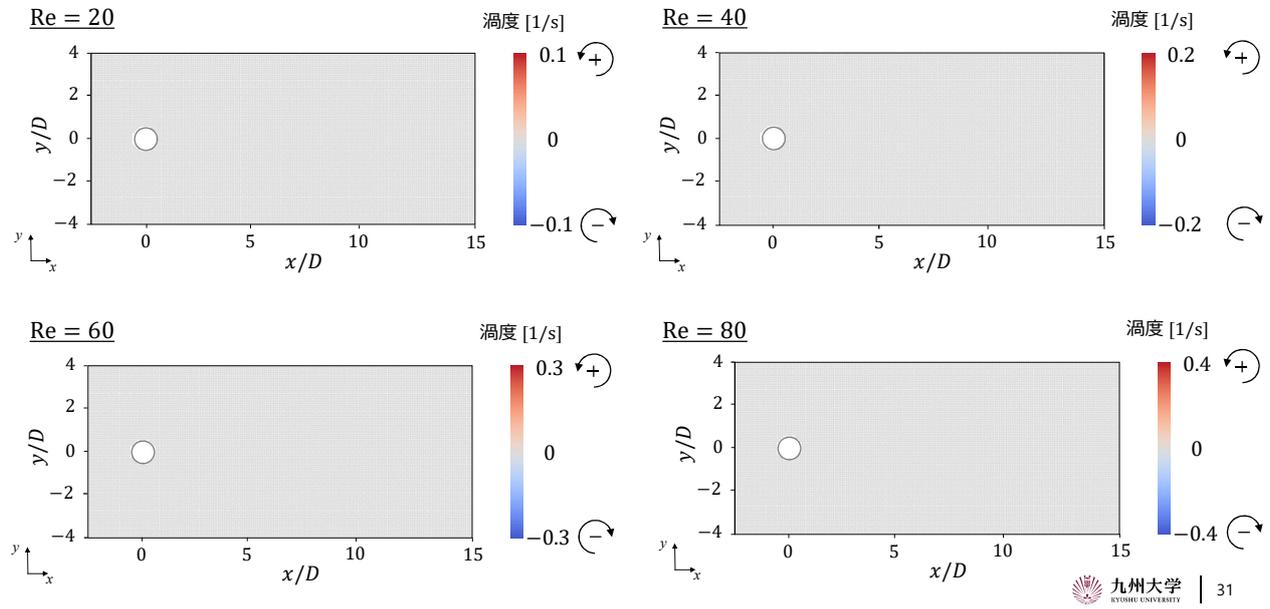
モデル概形



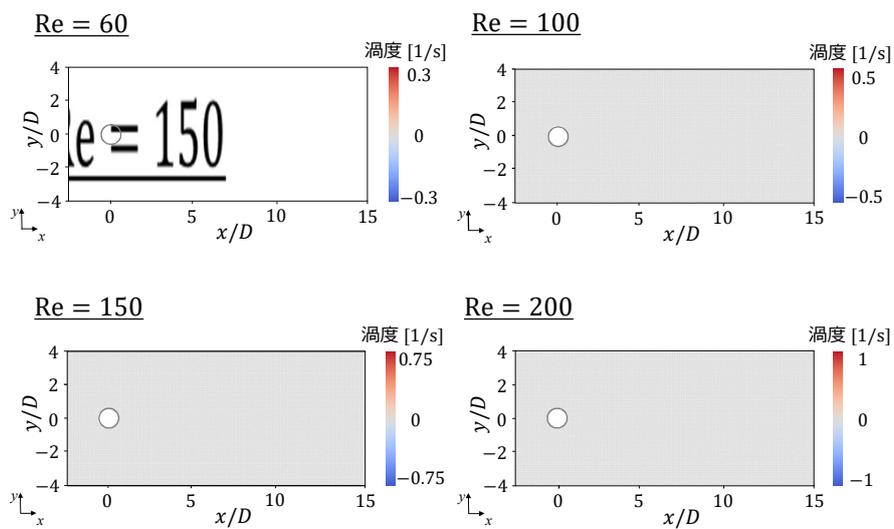
循環モデル



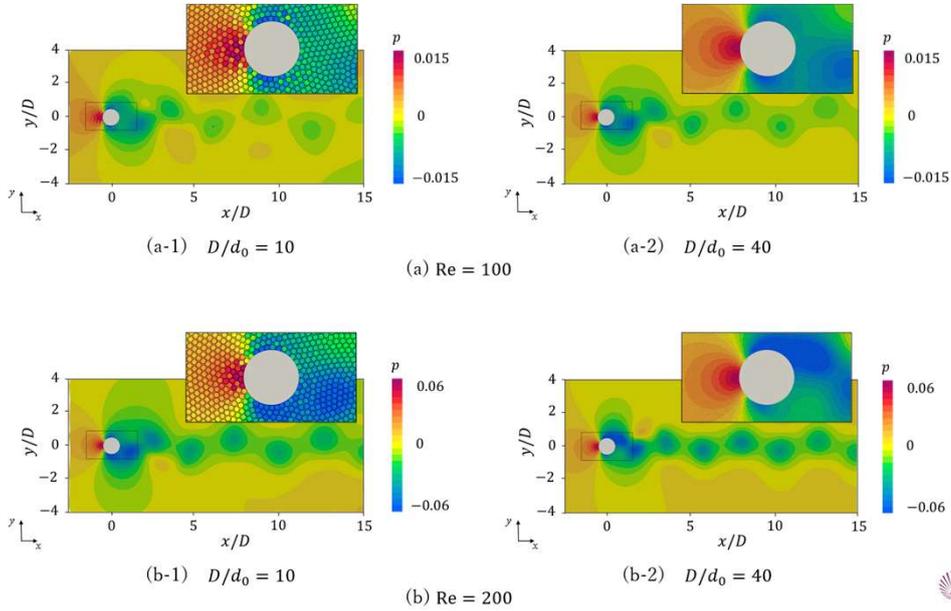
双子渦からカルマン渦への遷移



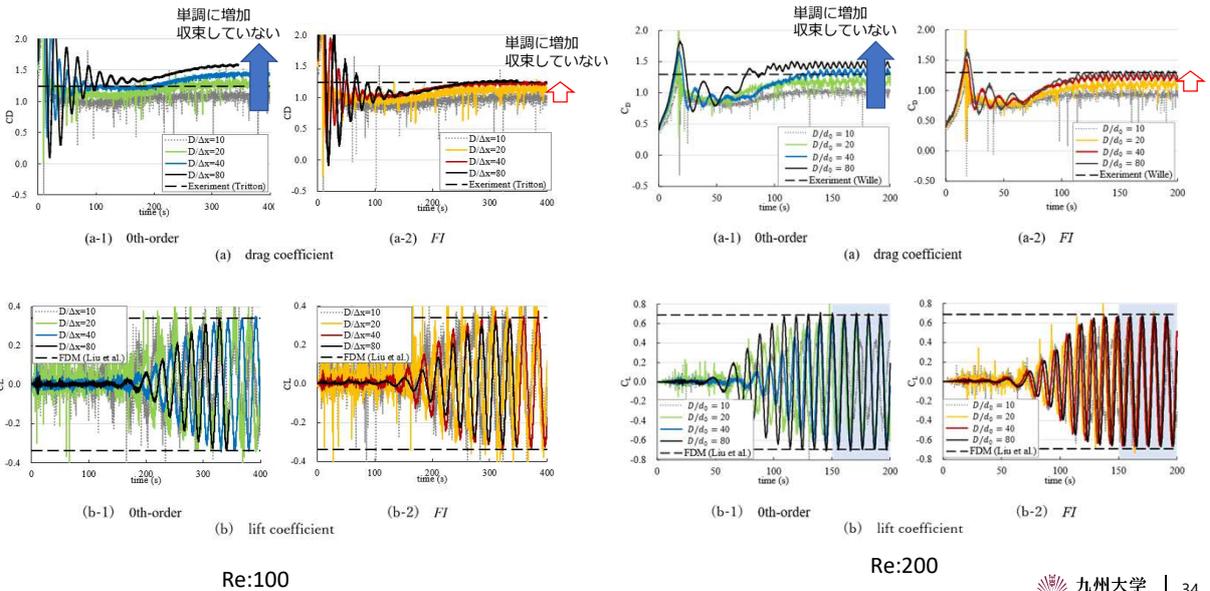
カルマン渦の検証_Re = 50~200



圧力分布

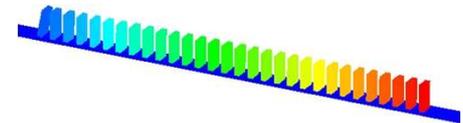
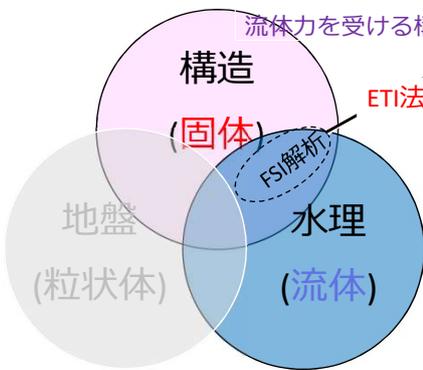


抗力係数による検証



自然災害におけるマルチフィジックス現象(解像型モデル)

Fluid-rigid-body interaction simulations and validations using a coupled stabilized ISPH-DEM incorporated with the ETI
 Asai, M., Li, Y., Chandra, B. & Takase, S
 Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 377, 113681., 2021



ETIのポイント②
 (多数同時接触を考える)

ニュートンの反発係数 \rightarrow Storageの反発係数

$$\mathbf{v}^{n+1} = -e \mathbf{v}^n \quad W_{restituti} = e^2 W_{compression}$$

ETIのポイント①

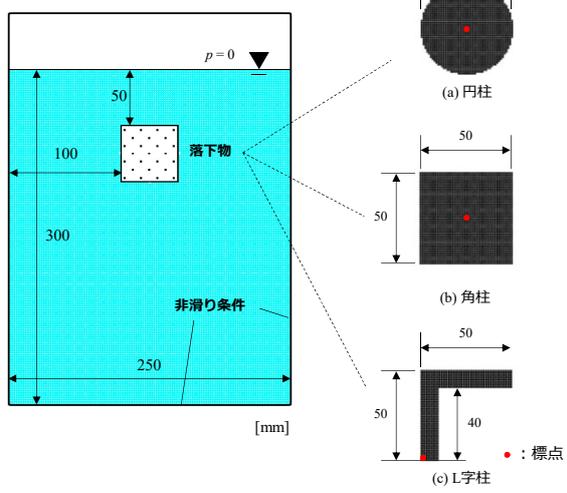
$\Delta t(\text{流体}) \approx \Delta t(\text{剛体接触})$

適切な反発を与える力積を与える

$$\lambda = \frac{-(1+e) \mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n}}{\sum_{i=\{A,B\}} (M_i^{-1} + (\mathbf{I}_i^{-1} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{n}) \times \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n})}$$

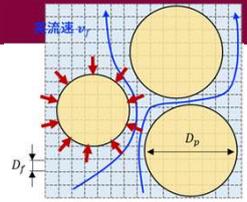
解析モデル・解析条件

解析モデル



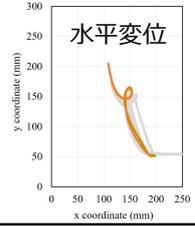
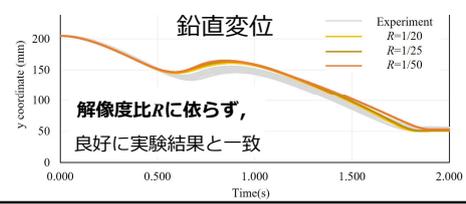
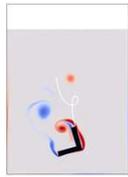
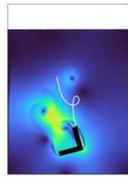
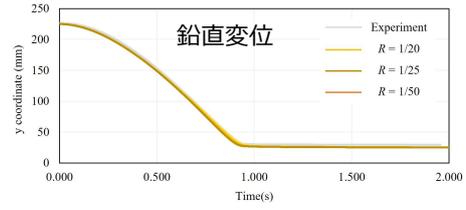
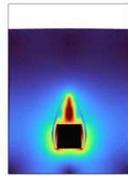
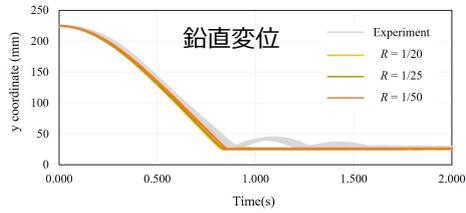
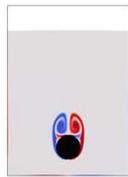
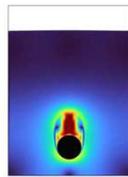
解析条件

- ISPH: 自由表面を含む流体解析
- 流体密度: 1.0 [g/cm³]
 - 流体粘性: 1.0*10⁻⁶ [m²/s]
 - 時間増分: 1.0*10⁻⁴ [sec]
 - 渦粘性モデル (Smagorinskyモデル)



- 長径 50 [mm] に対する初期粒子間隔の比 $R = \frac{D_f}{D_p}$
- 2.50 [mm] $\rightarrow R=1/20$
- 2.00 [mm] $\rightarrow R=1/25$
- 1.00 [mm] $\rightarrow R=1/50$
- 0.50 [mm] $\rightarrow R=1/100$

実験と比較検証結果



自然災害におけるマルチフィジックス現象



洗掘+液状化による
建造物の不安定化



連続体から不連続体への変化
固体から流体への相変化の解析には
粒子法が最適!?



基礎地盤の洗掘

構造
(固体)

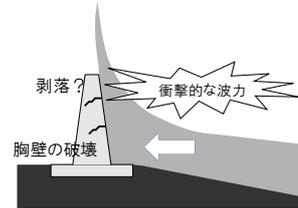
(粒状体)

水理
(流体)

モノが壊れるまでの計算には粒子法?



流体力を受ける構造

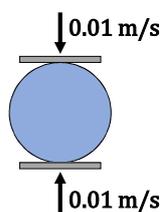


粒子法の現時点

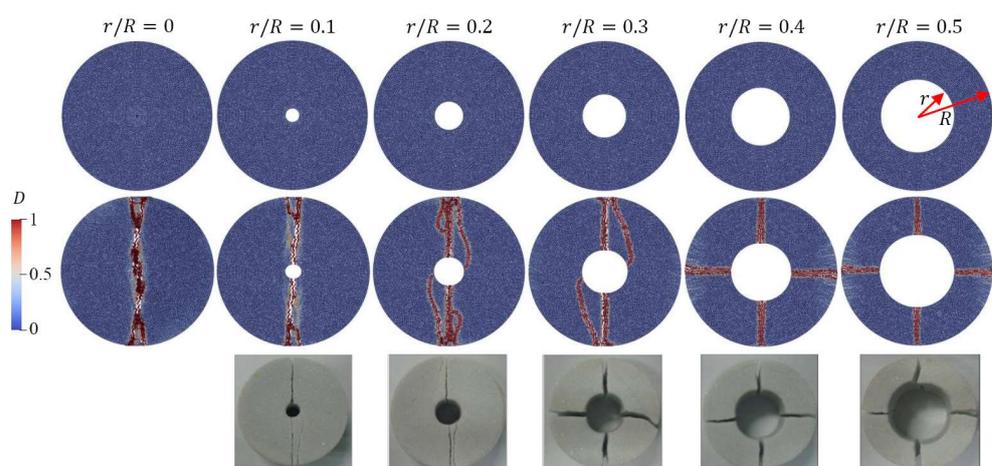
1. 粒子配置の乱れに応じたテイラーメードのカーネル関数による高次化に成功
2. 流体に対してであれば、高精度差分法と同程度の解析が実施可能。+自由表面の取り扱いは利点あり。
3. 完全ラグランジュ記述のため、相変化などにも対応可能。
4. 移動境界問題であれば、ほかのCFDよりも優れている？

脆性材料の破壊への展開

Brazilian test



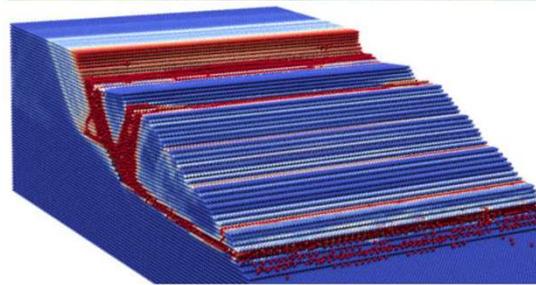
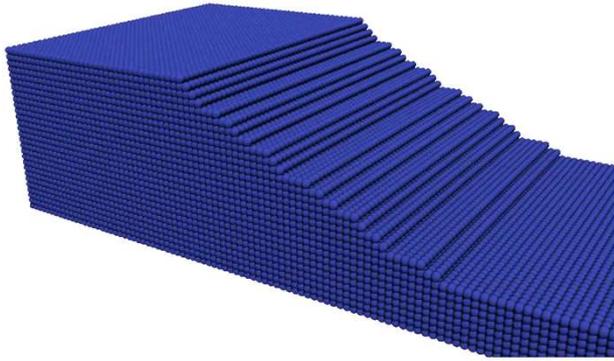
$$\sigma_t = \frac{P}{\pi RL}$$



Yield function: $\varphi(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_T - \sigma_1$

Numerical tests

Selborne experiment



Yield function: Mohr-Coulomb